12 Etablissement du terme relativiste

1) $\vec{\mathcal{L}}_0(M/R) = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v}(M/R)$ 1

quantification $|\vec{\mathcal{L}}| = m_e r v = n\hbar$ 1 ↑ Planck réduite

Rayon → $\dfrac{m_e v^2}{r} = \dfrac{e^2}{r^2} \Rightarrow r_n = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2$ 1 $\dfrac{\hbar^2}{m_e e^2}$ = rayon de Bohr a_0

Vitesse → $v_n = \dfrac{e^2}{\hbar}\dfrac{1}{n} = \dfrac{\alpha c}{n}$ 1

$v_n/c = \alpha/n$ α cste de structure fine $\alpha \sim \dfrac{1}{137}$

AN: $v_2/c = 3{,}65\,10^{-3}$ 1

limite de validité de la mécanique classique ⇒ e^- faiblement relativiste

2) $E_n = -\dfrac{e^2}{2r_n} = -\dfrac{e^2}{2}\left(\dfrac{m_e e^2}{\hbar^2}\right)\dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{E_I}{n^2}$ avec $E_I = \dfrac{m_e e^4}{2\hbar^2}$ 1 1

AN: $n=2 \Rightarrow E_2 = -\dfrac{E_I}{4} = -\dfrac{m_e c^2\alpha^2}{8}$ 1

3) $E^2 = p^2c^2 + m_e^2c^4$

a) $E = c(p^2 + m_e^2c^2)^{1/2} = m_e c^2\left(1 + \left(\dfrac{p}{m_e c}\right)^2\right)^{1/2}$

$\simeq m_e c^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{m_e c}\right)^2 - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{p}{m_e c}\right)^4 + o(\varepsilon)\right)$

$= \underbrace{m_e c^2}_{E\text{ au repos}} + \underbrace{\dfrac{p^2}{2m_e}}_{E_k\text{ de }H_0} \underbrace{- \dfrac{1}{8}\dfrac{p^4}{m_e^3c^2}}_{W_{mv}}$ 2

↑ première correction à l'énergie due à la relativité restreinte

b) Calcul de $\langle W_{mv}\rangle_{2p} = \langle W_{mv}\rangle_{2,1}$ (ℓ)

avec $e^2/a_0 = m_e c^2\alpha^2$

$\langle W_{mv}\rangle_{2p} = -\dfrac{1}{2m_ec^2}\left[\left(-\dfrac{m_ec^2\alpha^2}{8}\right)^2 + 2\left(-\dfrac{m_ec^2\alpha^2}{8}\right)e^2\dfrac{1}{4a_0} + e^4\dfrac{1}{12a_0^2}\right]$

$= -\dfrac{m_ec^2\alpha^2}{2}\left[\dfrac{1}{64} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{12}\right] = -\dfrac{7}{384} m_e c^2\alpha^4$ 2

8 Facteur de Landé

1) $\vec{J}$ m^t cinétique totale $\Rightarrow$ TMC $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{L}} = \vec{cste} = \vec{J}$ 1

2) $\langle \vec{S} \rangle = \alpha \vec{J}$ 1 dirigé selon $\vec{J}$

$\vec{J} \cdot \langle \vec{S} \rangle = \alpha \vec{J}^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\vec{J} \cdot \langle \vec{S} \rangle}{\vec{J}^2} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{S}}{\vec{J}^2}$

soit $\langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{J} \cdot \vec{S}}{\vec{J}^2} \vec{J}$ 1

3) Composante selon Oz $\langle S_z \rangle = \frac{\vec{J} \cdot \vec{S}}{\vec{J}^2} J_z$ 1

$\hbar^2 j(j+1)$ 1 Valeur propre

Il faut exprimer $\vec{J} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$ 1

$\frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)$ 1

Soit $\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \hbar m_j \left(\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)} \right) = \langle n l j m_j | S_z | n l j m_j \rangle$
$= \hbar m_j (g-1)$

On en déduit donc le facteur de Landé tel que

$$g = 1 + \frac{1}{2} \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)}$$ 1